

第2讲圆综合之线段专项训练（练习）

一、圆与勾股定理

1. 已知， $\odot O$ 的半径为1，直线 CD 经过圆心 O ，交 $\odot O$ 于 C 、 D 两点，直径 $AB \perp CD$ ，点 M 是直线 CD 上异于 C 、 D 、 O 的一个动点，直线 AM 交 $\odot O$ 于点 N ，点 P 是直线 CD 上另一点，且 $PM = PN$ 。

（1）如图1，点 M 在 $\odot O$ 的内部，求证： PN 是 $\odot O$ 的切线。

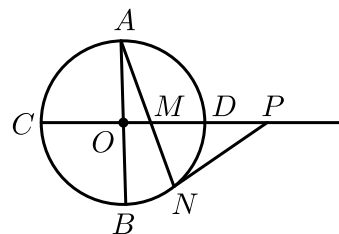


图 1

（2）如图2，点 M 在 $\odot O$ 的外部，且 $\angle AMO = 30^\circ$ ，求 OP 的长。

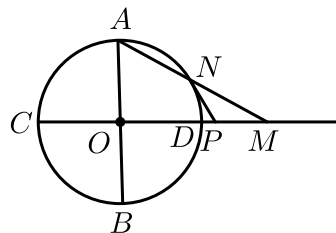
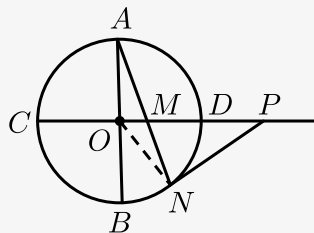


图 2

【答案】（1）证明见解析。

（2） $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

【解析】（1）连接 ON ，



$$\because AB \perp CD,$$

$$\therefore \angle AOM = 90^\circ,$$

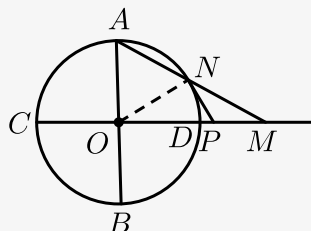
$$\therefore \angle OAM + \angle OMA = 90^\circ,$$

$$\because OA = ON,$$

$$\therefore \angle OAM = \angle ONA,$$

$\therefore PM = PN$,
 $\therefore \angle PMN = \angle PNM$,
 $\therefore \angle ONA + \angle PNM = 90^\circ$,
 $\therefore PN \perp ON$,
 $\therefore PN$ 为 $\odot O$ 的切线 .

(2) 连接 ON ,



$\therefore \angle M = 30^\circ$,
 $\therefore \angle A = 60^\circ = \angle ONA$,
 $\therefore \triangle AON$ 的等边三角形 ,
 $\therefore \angle NOP = 30^\circ$,
 $\therefore PM = PN$,
 $\therefore \angle PNM = \angle PMN = 30^\circ$,
 $\therefore \angle PNO = 90^\circ$,
 $\therefore OP = \frac{ON}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【标注】【知识点】圆与三角函数

2. 在 $\triangle ABC$ 中 , $\angle C = 90^\circ$, 以边 AB 上一点 O 为圆心 , OA 为半径的圆与 BC 相切于点 D , 分别交 AB , AC 于点 E , F .

(1) 如图1 , 连接 AD , 若 $\angle CAD = 25^\circ$, 求 $\angle B$ 的大小 .

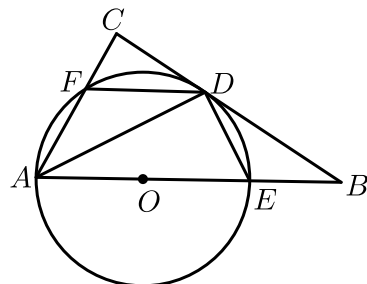


图 1

(2) 如图2 , 若点 F 为 $\widehat{AD}$ 的中点 , $\odot O$ 的半径为 2 , 求 AB 的长 .

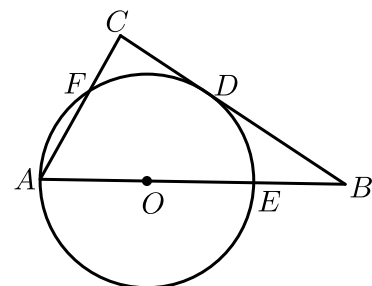


图 2

【答案】(1) $\angle B = 40^\circ$.

(2) $AB = 6$.

【解析】(1) 连接 OD ,

$\because OA$ 为
半径的
圆与
 BC 相
切于点
 D ,

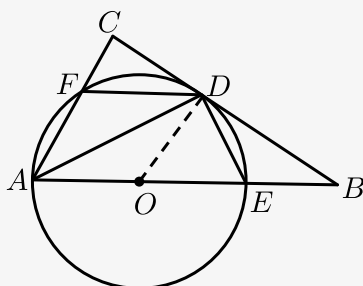


图 1

$\therefore$

$OD \perp BC$,

$\therefore \angle ODB = 90^\circ$,

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , $\angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle ODB = \angle C$,

$\therefore OD \parallel AC$,

$\therefore \angle CAD = \angle ADO = 25^\circ$,

$\because OA = OD$,

$\therefore \angle OAD = \angle ODA = 25^\circ$,

$\therefore \angle BOD = 2\angle OAD = 50^\circ$,

$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle BOD = 40^\circ$.

(2) 连接 OF , OD ,

由 (1) 得 : $OD \parallel AC$,

$\therefore \angle AFO = \angle FOD$,

$\because OA = OF$, 点 F 为 $\widehat{AD}$ 的中点 ,

$\therefore \angle A = \angle AFO$, $\angle AOF = \angle FOD$,

$\therefore \angle A = \angle AFO = \angle AOF = 60^\circ$,



$$\therefore AB = OA + OB = 6.$$

A circle with center O and diameter AB . Points C and D are on the upper arc of the circle. Line segments AC , AD , DC , OC , and OD are drawn. Angle AOC is labeled as α .

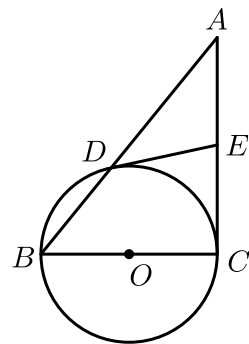
4

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle B = \angle OCB = 70^\circ, \\
&\therefore \angle COB = 180^\circ - \angle B - \angle OCB = 40^\circ, \\
&\because OA = OD, \\
&\therefore \angle ADO = \angle A = 50^\circ, \\
&\therefore \angle AOD = 180^\circ - \angle A - \angle ADO = 80^\circ, \\
&\therefore \angle COD = 180^\circ - \angle AOD - \angle BOC = 60^\circ, \\
&\because OD = OC, \\
&\therefore \angle ODC = \angle OCD = \frac{180^\circ - \angle COD}{2} = 60^\circ, \\
&\therefore \angle OCD \text{ 为 } 60^\circ.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) &\because \angle COD = 60^\circ, OC = OD, \\
&\therefore \triangle COD \text{ 为等边三角形}, \\
&\therefore CD = OC = 2, \\
&\because OD \perp DP, OD \text{ 为半径}, \\
&\therefore DP \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线}, \\
&\text{同理 } CP \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线}, \\
&\therefore DP = CP, \angle DPO = \angle CPO, \\
&\therefore PM \perp CD \text{ 且 } DM = CM = \frac{1}{2}CD = 1, \\
&\therefore OM = \sqrt{OD^2 - DM^2} = \sqrt{3}, \\
&\because OM \perp CD, \angle ODC = 60^\circ, \\
&\therefore \angle DOM = 30^\circ, \\
&\because DP \perp OD, \\
&\therefore \cos \angle DOP = \frac{OD}{OP}, \\
&\therefore OP = \frac{OD}{\cos \angle DOP} = \frac{2}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \\
&\therefore OM \text{ 长为 } \sqrt{3}, OP \text{ 长为 } \frac{4}{3}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】圆与三角函数

4. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，以 BC 为直径的 $\odot O$ 交 AB 于点 D ，切线 DE 交 AC 于点 E 。



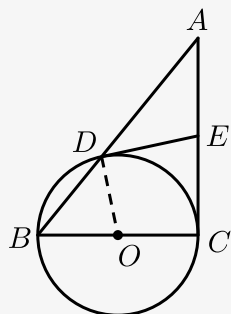
(1) 求证： $\angle A = \angle ADE$.

(2) 若 $AD = 16$, $DE = 10$, 求 BC 的长 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $BC = 15$.

【解析】 (1) 如图，连接 OD ,



$\because DE$ 是切线， OD 为 $\odot O$ 的半径，

$\therefore \angle ODE = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADE + \angle BDO = 90^\circ$,

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

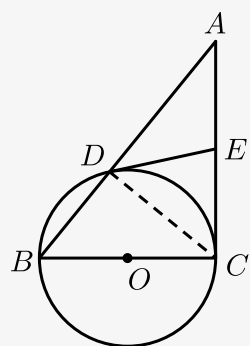
$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ$,

$\because OD = OB$,

$\therefore \angle B = \angle BDO$,

$\therefore \angle ADE = \angle A$.

(2) 连接 CD .

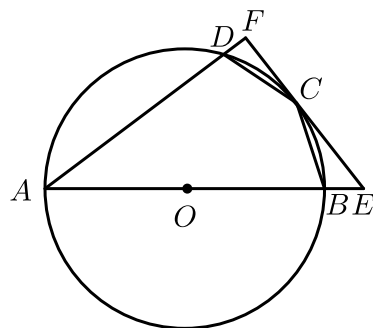


$\because \angle ADE = \angle A$,
 $\therefore AE = DE$,
 $\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径 , $\angle ACB = 90^\circ$,
 $\therefore EC$ 是 $\odot O$ 的切线 ,
 $\therefore ED = EC$,
 $\therefore AE = EC$,
 $\because DE = 10$,
 $\therefore AC = 2DE = 20$,
 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中 , $DC = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$,
 设 $BD = x$,
 在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中 , $BC^2 = x^2 + 12^2$,
 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , $BC^2 = (x + 16)^2 - 20^2$,
 $\therefore x^2 + 12^2 = (x + 16)^2 - 20^2$,
 解得 $x = 9$,
 $\therefore BC = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$.

【标注】【知识点】圆与勾股

二、圆与三角函数

5. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，点 O 在 AB 上， $BC = CD$ ，过点 C 作 $\odot O$ 的切线，分别交 AB ， AD 的延长线于点 E ， F 。



- (1) 求证： $AF \perp EF$.
 (2) 若 $\cos A = \frac{4}{5}$ ， $BE = 1$ ，求 AD 的长 .

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) $AD = AB \cdot \cos A = \frac{32}{5}$.

$$\therefore AB = 8,$$

$$\therefore \text{在Rt}\triangle ABD\text{中}, AD = AB \cdot \cos A = \frac{32}{5}.$$

【标注】【知识点】切线的性质定理

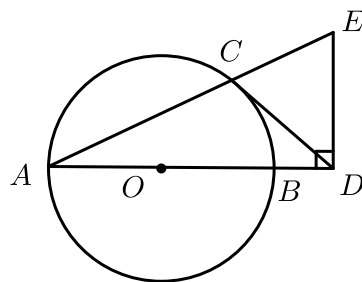
【知识点】弧、弦、圆心角关系

【知识点】圆周角定理以及应用

【知识点】圆与三角函数

【能力】推理论证能力

6. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, CD 与 $\odot O$ 相切于点 C , 与 AB 的延长线交于点 D , $DE \perp AD$ 且与 AC 的延长线交于点 E .



(1) 求证: $DC = DE$.

(2) 若 $\tan \angle CAB = \frac{1}{2}$, $AB = 3$, 求 BD 的长.

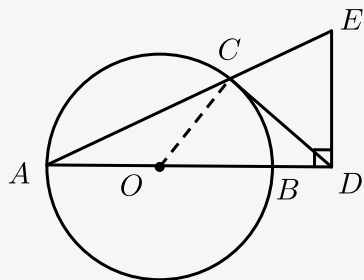
【答案】(1) 证明见解析.

(2) $BD = 1$.

【解析】(1) 连接 OC ,

$\because CD$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle OCD = 90^\circ$,



$\therefore \angle ACO + \angle DCE = 90^\circ$,

又 $\because ED \perp AD$,

$\therefore \angle EDA = 90^\circ$,

$$\therefore \angle EAD + \angle E = 90^\circ,$$

$$\therefore OC = OA,$$

$$\therefore \angle ACO = \angle EAD,$$

$$\text{故 } \angle DCE = \angle E,$$

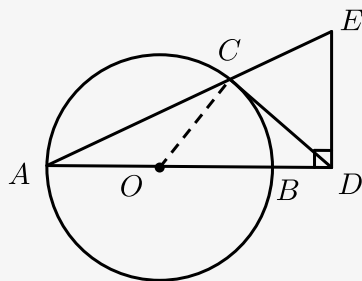
$$\therefore DC = DE.$$

(2) 设 $BD = x$,

$$\text{则 } AD = AB + BD = 3 + x, OD = OB + BD = 1.5 + x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle EAD \text{ 中, } \therefore \tan \angle CAB = \frac{1}{2},$$

$$\therefore ED = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}(3 + x),$$



$$\text{由 (1) 知, } DC = \frac{1}{2}(3 + x), \text{ 在 Rt}\triangle OCD \text{ 中,}$$

$$OC^2 + CD^2 = DO^2,$$

$$\text{则 } 1.5^2 + \left[\frac{1}{2}(3 + x) \right]^2 = (1.5 + x)^2,$$

$$\text{解得: } x_1 = -3 \text{ (舍去)}, x_2 = 1,$$

$$\text{故 } BD = 1.$$

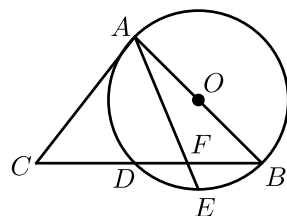
【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】解直角三角形的综合应用

【知识点】弧、弦、圆心角关系

【知识点】切线的性质定理

7. 如图, AB 为 $\odot O$ 直径, BC 交 $\odot O$ 于点 D , E 是弧 BD 的中点, 连接 AE 交 BC 于点 F ,
 $\angle ACB = 2\angle EAB$.



(1) 求证: AC 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 若 $AC = 6$, $\cos C = \frac{2}{3}$, 求线段 BF 的长.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $BF = 3$.

【解析】(1) 连接 AD .

$\because E$ 是弧 BD 的中点,

$\therefore \angle DAE = \angle EAB$.

$\because \angle C = 2\angle EAB$,

$\therefore \angle C = \angle BAD$.

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

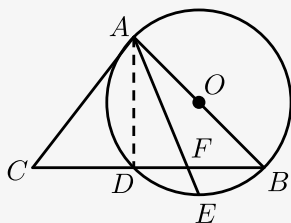
$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$.

$\therefore \angle C + \angle CAD = 90^\circ$.

$\therefore \angle BAD + \angle CAD = 90^\circ$.

即 $BA \perp AC$.

$\therefore AC$ 是 $\odot O$ 切线.



(2) 过点 F 做 $FH \perp AB$ 于点 H .

$\because AD \perp BD$,

$\angle DAE = \angle EAB$,

$\therefore FH = FD$, 且

$FH \parallel AC$.

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中,

$\because \cos C = \frac{2}{3}$, $AC = 6$,

$\therefore CD = 4$.

同理, 在 $\text{Rt}\triangle BAC$ 中, 可求得 $BC = 9$.

$\therefore BD = 5$.

设 $DF = x$, 则 $FH = x$, $BF = 5 - x$.

$\because FH \parallel AC$,

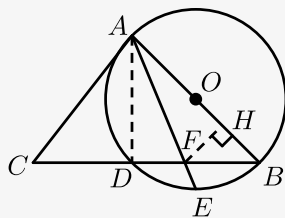
$\therefore \angle BFH = \angle C$.

$\therefore \cos \angle BFH = \frac{FH}{BF} = \frac{2}{3}$.

即 $\frac{x}{5-x} = \frac{2}{3}$.

解得 $x = 2$.

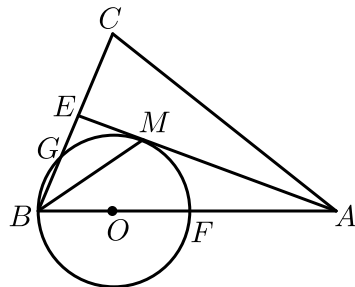
$\therefore BF = 3$.



【标注】【知识点】切线的判定定理

三、圆与相似

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AE 是 $\angle BAC$ 的平分线， $\angle ABC$ 的平分线 BM 交 AE 于点 M ，点 O 在 AB 上，以点 O 为圆心， OB 的长为半径的圆经过点 M ，交 BC 于点 G ，交 AB 于点 F 。



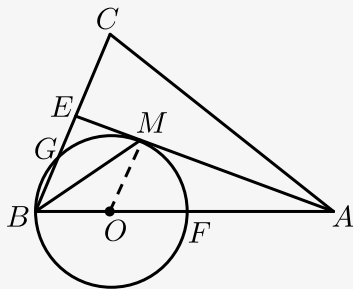
- (1) 求证： AE 为 $\odot O$ 的切线。
 (2) 当 $BC = 8$ ， $AC = 12$ 时，求 $\odot O$ 的半径。
 (3) 在(2)的条件下，求线段 BG 的长。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) 3; 2。

(3) 2。

【解析】 (1) 连接 OM 。



$\because AC = AB$ ， AE 平分 $\angle BAC$ ，
 $\therefore AE \perp BC$ ， $CE = BE = \frac{1}{2}BC$ ，
 $\because OB = OM$ ，
 $\therefore \angle OBM = \angle OMB$ ，
 $\because BM$ 平分 $\angle ABC$ ，
 $\therefore \angle OBM = \angle CBM$ ，
 $\therefore \angle OMB = \angle CBM$ ，
 $\therefore OM \parallel BC$ ，
 又 $\because AE \perp BC$ ，

$\therefore AE$ 是 $\odot O$ 的切线.

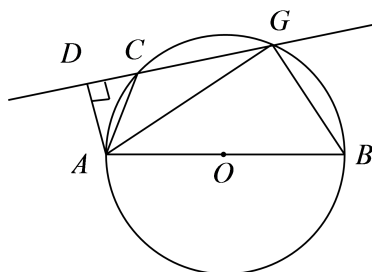
 $\therefore OM \parallel BE,$
$$\therefore \frac{OM}{BE} = \frac{AO}{AB}, \text{ 由(1)得 } BE = 4, \\ \text{即 } \frac{r}{4} = \frac{12-r}{12}, \text{ 解得 } r = 3,$$
 $\therefore \odot O$ 的半径为 3 .
$$\therefore \angle OME = \angle MEH = \angle EHO = 90^\circ,$$
$$\therefore HE = OM = 3,$$
$$\therefore BH = 1,$$
$$\therefore BG = 2BH = 2.$$

9. 已知, AB 为 $\odot O$ 的直径, C 为 $\odot O$ 上一点, 若直线 CD 与 $\odot O$ 相切于点 C , $AD \perp CD$, 垂足为 D .

图 (1)

(2)

如果把直线 CD 向下平行移动，如图（2），直线 CD 交 $\odot O$ 于 C, G 两点，若题目中的其他条件不变，且 $AG = 4, BG = 3$ ，求 $\frac{AD}{AC}$ 的值。



图（2）

【答案】（1） $AC = 2\sqrt{5}$.

（2） $\frac{AD}{AC} = \frac{4}{5}$.

【解析】（1） $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ ,$$

$\because$ 直线 CD 与 $\odot O$ 相切于点 C ，

$$\therefore \angle ACD = \angle B ,$$

又 $\because AD \perp CD$ ，

$$\therefore \angle CDA = 90^\circ = \angle ACB ,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC ,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} ,$$

$$\therefore AC^2 = AB \cdot AD = 10 \times 2 = 20 ,$$

$$\therefore AC = 2\sqrt{5} .$$

（2） $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle AGB = 90^\circ ,$$

$$\therefore AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 ,$$

$\because AD \perp CD$ ，

$$\therefore \angle CDA = 90^\circ = \angle AGB ,$$

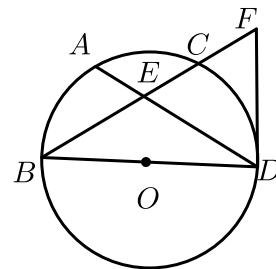
又 $\because \angle ACD = \angle B$ ，

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC ,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AG}{AB} = \frac{4}{5} .$$

【标注】【知识点】圆与相似

10. 如图， BD 为 $\odot O$ 的直径， A 为 $\widehat{BC}$ 的中点， AD 交 BC 于点 E ，过 D 作 $\odot O$ 的切线，交 BC 的延长线于 F 。

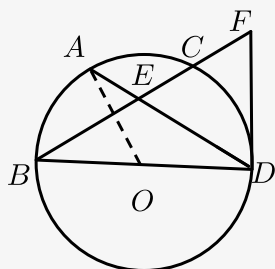


- (1) 求证： $DF = EF$ 。
 (2) $AE = 2$ ， $DE = 4$ ，求 BD 长。

【答案】 (1) 证明见解析。

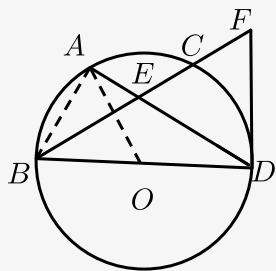
(2) $4\sqrt{3}$ 。

【解析】 (1) 连接 OA ，



$\because A$ 为 $\widehat{BC}$ 的中点，
 $\therefore OA \perp BC$ ，
 $\therefore \angle OAE + \angle AEG = 90^\circ$ ，
 $\because \angle AEG = \angle FED$ ，
 $\therefore \angle OAE + \angle FED = 90^\circ$ ，
 $\because DF$ 为圆的切线，
 $\therefore DF \perp BD$ ，即 $\angle FDE + \angle ADB = 90^\circ$ ，
 $\because OA = OD$ ，
 $\therefore \angle OAE = \angle ADB$ ，
 $\therefore \angle FED = \angle FDE$ ，
 $\therefore DF = EF$ 。

(2) 连接 AB ，



$\because BD$ 为圆的直径 ,

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABE + \angle AEB = 90^\circ$,

$\because OA \perp BC$,

$\therefore \angle OAD + \angle AEB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABE = \angle OAD = \angle ADO$,

$\therefore \angle BAE = \angle DAB$,

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ADB$,

$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB}$ 即 $AB^2 = AE \times AD = 2 \times (2 + 4) = 12$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中 , 根据勾股定理得 : $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 12 + 36 = 48$

则 $BD = 4\sqrt{3}$.

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】圆与勾股

【知识点】圆与相似

【知识点】切线的性质定理

【知识点】圆周角定理以及应用